PROGNOSTICKÉ METODY P10 2009-04-23

Ortogonalizace reziduí:

- ✓ Odvození „strukturální“ alternativy spočívá v transformaci VAR modelu do formy mající „ortogonální inovace“ (ortogonalní rezidua). Jinak řečeno model je transformován tak, aby neobsahoval korelované náhodné složky.
- ✓ Postup ortogonalizace reziduí lze názorně demonstrovat na příkladu jednoduchého VAR modelu obsahujícího dvě proměnné x_t a y_t a majícího dvě zpoždění ve VAR prostoru.

  $\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$, kde náhodné složky jsou souběžně korelovány, tj.:

  Statistické charakteristiky: $E(u_{1t}) = E(u_{2t}) = 0$; $E(u_{1t}^2) = \sigma_{11}$; $E(u_{2t}^2) = \sigma_{22}$; $E(u_{1t} \cdot u_{2t}) = \sigma_{12}$
- ✓ Pro získání modelu, ve kterém nebudou náhodné složky souběžně korelovány, lze první řádek vztahu vynásobit $\delta = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}$ a výsledek odečíst od druhého řádku.
- ✓ $\begin{bmatrix} x_t \\ y_t - \delta x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1^* & d_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2^* & d_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t}^* \end{bmatrix}$, kde

  $c_s^* = (c_s - \delta a_s)$; $d_s^* = (d_s - \delta b_s)$; $u_{2t}^* = (u_{2t} - \delta u_{1t})$
- ✓ Souběžnou nezkorelovanost náhodných složek lze dokázat následovně:

  $E(u_{1t} \cdot u_{2t}^*) = E(u_{1t}(u_{2t} - \delta u_{1t})) = E((u_{1t} \cdot u_{2t}) - (\sigma_{12}/\sigma_{11}) E(u_{1t}^2)) = \sigma_{12} - \sigma_{12} = 0$
- ✓ Hodnoty σ_{ij} (rozptylů) jsou zpravidla neznámé a musí být odhadnuty. Myšlenka ortogonalizace reziduí spočívá v možnosti využití jednotlivých rovnic VAR modelu odděleně v ekonomické analýze. V tomto smyslu lze ekonomickou analýzu chápat jako analýzu, která se zabývá vlivem známého šoku nebo též „ortogonální inovace“ na zkoumaný systém (vztah).
- ✓ **VAR → VMA →I-R fci**

  VMA – Vektor Moving Average

  VAR(1): $x_t = c_1 x_{t-1} + u_t$

  $x_{t-1} = c_1 x_{t-2} + u_{t-1}$

  $x_t = c_1^2 x_{t-2} + c_1 u_{t-1} + u_t$

  $x_t = \sum_{i=0}^{n} c_1^2 x_{t-2} + \sum_{i=0}^{n+1} c_1^{n+1} x_{t-1} \rightarrow$ podmínka stability: $\lim_{n\to\infty} = \left(\sum_{i=0}^{n+1} c_1^{n+1} x_{t-1} \right) = 0$

  VMA: $x_t = \sum_{i=0}^{n+1} c_1^i u_{t-i}$

  $$u_{2t}^* = u_{2t} - \delta u_{1t}$$
  $$\Downarrow$$
  $$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}$$

Impulse-response analýza:

- ✓ $\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-i} \\ u_{2t-i}^* \end{bmatrix}$, kde $u_{2t}^* = (u_{2t} - \delta u_{1t})$ a $\delta = \sigma_{12}/\sigma_{11}$
- ✓ $\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(i)} & \phi_{12}^{(i)} \\ \phi_{21}^{(i)} & \phi_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-i} \\ u_{2t-i}^* \end{bmatrix}$

- **Význam elementů v I-R funkci:**
  - Význam pro jednotlivá i lze vymezit následovně:
  - ϕ_{21}^{0} reprezentuje očekávaný okamžitý vliv jednotkové změny v u_{1t} na y_t .
  - ϕ_{21}^{1} je očekávaná reakce v prvním období na jednotkovou změnu v u_{1t} na y_t .
- **Odvození prognózy z VAR modelu:**
  - VAR modely poskytují dvě velké **výhody** při jejich aplikaci v prognostické činnosti. Jednak nemusíme věnovat takovou pozornost ekonomické teorii při specifikaci modelu, a to vzhledem k tomu, že zde nerozlišujeme mezi endogenními a exogenními proměnnými a dále zde nejsou uvalovány žádné nulové restrikce. Druhou a důležitější výhodou je, že se nemusí přijímat žádné předpoklady o hodnotách exogenních proměnných v prognostickém horizontu ve srovnání se standardními ekonometrickými prognózami, které jsou podmíněné na znalostech hodnot exogenních proměnných.
  - Je-li abstrahováno od korelace mezi rezidui jednotlivých rovnic, lze prognózu z VAR modelu odvodit mechanicky.
  - V prvním období je způsob analogický odvození prognózy z ADL modelu, tj. dosazením známých hodnot zahrnutých proměnných v modelovaném vztahu.
  - Pro další období prognostického horizontu se prognóza odvodí rekurzivně podmíněně na prognózách v obdobích, pro které skutečné hodnoty nejsou známy. To lze přehledně zapsat následovně:

$$f_{n,1}\ nebo\ \hat{X}_{kT+h} = \eta + \sum_{s=1}^{p} C_s \hat{X}_{kT-s+h}$$

$$\hat{X}_{kT-s+h} = \begin{Bmatrix} \hat{X}_{kT-s+h}\ pro\ h > s \\ X_{kT-s+h}\ pro\ h \le s \end{Bmatrix}$$

Budoucí hodnoty kT proměnné lze zapsat jako konstanta plus parametry v matici c_s a násobíme s hodnotami proměnné x, kterých je k a jsou zpožděné. Jestliže h je větší než s, jedná se o prognózy x odvozené v předchozích krocích, pokud je menší nebo rovno, používáme skutečné hodnoty.

Kointegrační analýza:

- Transformací, tzn. převodem nestacionárních časových řad na stacionární (např. diferencováním u řad majících stochastický trend) ztrácí časové řady z ekonomického hlediska velmi důležitou informaci o jejich dlouhodobých vztazích.
- Kointegrační analýza umožňuje řešit rozpor vzniklý mezi statistickými požadavky a ekonomickými potřebami.
- Předpokládejme, že proměnné Y_t a X_t jsou integrované stejného řádu (řádu jedna) a vyjádřeme jejich vztah v jednoduchém statickém modelu: $Y_t = \gamma X_t + u_t$
- Nyní mohou nastat 3 **situace**:
  - proces u_t má charakter bílého šumu, tj. je typu I(0)
  - proces u_t je stacionární a autokorelovaný a je rovněž typu I(0)
  - proces u_t je typu I(1), tj. je integrován řádem jedna
- **V prvním případě** jsou proměnné kointegrovány, tzn. je mezi nimi dlouhodobý vztah (směřují k rovnovážnému stavu). Dlouhodobým multiplikátorem je regresní parametr γ.
  Zápis: (1,000; -γ) – jak dlouhodobě působí x na y.
- **V druhém případě** jsou proměnné taktéž kointegrovány. V této situaci lze psát $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$, kde ε_t je proces bílého šumu, pak model lze přepsat do tvaru ADL (1,1), tj.: $Y_t = \beta Y_{t-1} + \gamma X_t + \beta\gamma X_{t-1} + \varepsilon_t$
  Dlouhodobý multiplikátor (δ) vyjadřující dlouhodobý vztah má v tomto případě podobu: $\delta = \gamma\,(1+\beta)/(1-\beta)$
  Zde u_t lze zapsat: $u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t$
  Koiintegrační vektor zapsán: $\left(1{,}000; \dfrac{\gamma(1+\beta)}{1-\beta}\right)$
- **Poslední případ** neobsahuje kointegrované časové řady a tudíž neobsahuje dlouhodobý multiplikátor.
  Může se zde jednat o zdánlivou regresi. V dlouhém období nekonvergují, ale divergují (v rovnovážném stavu).
- **Myšlenka kointegrační analýzy** je založena na vztahu, který mají ekonomické proměnné mezi sebou v dlouhém období. Takovýto vztah může být konvergující k rovnovážnému stavu v dlouhém období nebo naopak divergující. Jestliže ekonomické proměnné od sebe v krátkém období divergují a tato divergence nemá

hranice, pak mezi proměnnými rovnovážný stav není. Je-li ovšem divergence od rovnovážného vztahu v určitých mezích, resp. stochastická, a po určitém čase se vytrácí, pak lze proměnné označit za kointegrované, jelikož v dlouhém období směřují k rovnovážnému vztahu.

✓ **Definice kointegrace:**
- Engle a Granger (1987) definují kointegraci mezi dvěma proměnnými následovně:
- **Definice:** časové řady x_t a y_t jsou kointegrovány řádu d, b, kde d>=b>=0 , v zápisu jako x_t, y_t ~ CI(d,b), jestliže:
  - Obě časové řady jsou integrovány řádu d
  - Existuje lineární kombinace těchto časových řad (proměnných), tj. $\alpha_1 x_t + \alpha_2 y_t$, která je integrována řádu d – b.

    Vektor $[\alpha_1, \alpha_2]$ se nazývá kointegrační vektor.
- V praktické aplikaci je nejzajímavější případ, kdy se časové řady při použití kointegračního vektoru stávají stacionárními, tj. kde d = b. V takovém případě obsahuje kointegrační vektor parametry dlouhodobého vztahu mezi proměnnými.
- Ekonomické časové řady jsou zpravidla integrovány řádu 1. Máme-li proměnné integrovány řádu 1 potom, aby byly kointegrovány musí splňovat: $x'_t \cdot \alpha \sim CI(1, 1)$.

✓ **Důležitost kointegrační analýzy** v modelování nestacionárních časových řad lze vymezit dle Banerjee A., et al. (2003) v následujících třech bodech:
- Jestliže existuje rovnovážný vztah mezi proměnnými, tj. je-li lineární kombinace proměnných stacionární, pak lze počítat s tím, že tato lineární kombinace se vrací ke svému průměru (zpravidla nulovému).
- Ekonometrický model, který obsahuje nestacionární proměnné má smysl tehdy a jen tehdy, jsou-li proměnné kointegrovány. V opačném případě se jedná o tzv. zdánlivou regresi (spurious regression)
  Je-li velké R^2 a malý (?) DW (Durbin-Watsonův test).
- Jestliže jsou proměnné kointegrovány, lze sestavit error-correction model, který obsahuje jak dlouhodobý vztah mezi proměnnými (tj. kointegrační vektor), tak odchylku proměnných od rovnovážného vztahu.

VECM:

✓ VECM lze formálně **zapsat** ve formě: $\Delta X_t = \eta + \Pi X_{t-1} + \sum_{s=1}^{p} C_s \Delta X_{t-s} + u_t$, kde C_S=0 pro s p, X_t je kx1 vektor proměnných integrovaných řádu 1, tj. I(1), $u_1, \ldots, u_t$ jsou nid $(0,\Sigma)$ a Π je matice dlouhodobého vztahu.

✓ **Jednoduchý VECM** (Vektor Error Connection Model):

$$\Delta x_t = \mu_1 + \alpha_1 \left(x_{t-1} - \beta_2^* y_{t-1} \right) + \gamma_{11} \Delta x_{t-1} + \gamma_{12} \Delta y_{t-1} + u_{1t}$$

$$\Delta x_t = \mu_2 + \alpha_2 \left(x_{t-1} - \beta_2^* y_{t-1} \right) + \underbrace{\gamma_{21} \Delta x_{t-1} + \gamma_{22} \Delta y_{t-1}}_{\text{VAR prostor}} + u_{2t}$$

✓ **Konstrukce modelů VECM** se podobně jako konstrukce VAR modelu skládá z následujících kroků: testy jednotkových kořenů, určení (odhad) kointegračního vektoru, volba proměnných modelu a maximální délky zpoždění, odhad modelu, zjednodušení modelu redukcí maximálního zpoždění a ortogonalizace reziduí.

Specific to general modelling:

✓ Specific-Genaral přístup je ekonometrickým přístupem, který reprezentuje tradiční ekonometrické modelování. Toto modelování je založeno na přesně definovaném vztahu (rovnici), který vychází z ekonomické teorie. Model je vystavěn na předpokladu nulového průměru náhodné složky, nepřítomnosti autokorelace a heteroskedasticity náhodné složky, specifikačních předpokladech a neexistenci perfektní multikolinearity. Z toho plyne, že za předpokladu stability prostředí nejčastěji používaná metoda nejmenších čtverců poskytuje nejlepší a nezkreslené lineární odhady.

✓ **Nevýhody tradičního přístupu:**
- Testy statistických a ekonometrických vlastností modelu nemají stanovené pořadí.
- Vzhledem k neomezenému počtu diagnostických testů není zřejmé, zda-li byl odhadnut nejlepší model.
- Podmíněný charakter testů rovněž neumožňuje určit skutečnou hladinu významnosti aplikovaných testů, jelikož není známo skutečné rozdělení pravděpodobnosti.