PROGNOSTICKÉ METODY P3

2009-03-05

Modely náhodných procházek:

✓ Platí: I(0)

$Y_{t+1} = Y_t + u_{t+1}$

$Y_t = Y_{t-1} + u_t$ $\quad \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = u_t$

$E(u_t)=0$

$Var(u_t)=\sigma^2<\infty$ $\quad \sigma$ – rozptyl konstantní a konečný

$Cov(u_t,u_s)=0,\ t\neq s$

✓ První diference modelu náhodné procházky je stacionární.

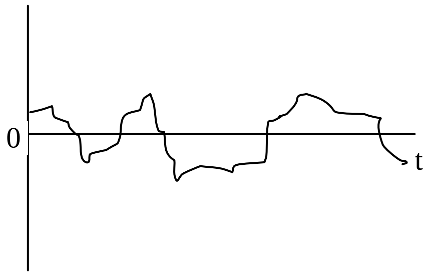
✓ **Vývoj v čase:**

$Y_0 = 0$

$Y_1 = Y_0 + u_1 = u_1$

$Y_2 = u_1 + u_2$

$$Y_i = \sum_{i=1}^{T} u_i$$



✓ **Prognóza Y_t:**

$E(Y_t) = E(Y_t \mid Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_0)$

$Y_{t+1} = \underline{Y_t + E(u_{t+1})}$ – plyne, že Yt nezávisí na předchozích hodnotách

$Y_{t+1} = Y_t$

$Y_{t+h} = Y_t$

Naše prognóza => stříška:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t + E(u_{t+1})$$

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t$$

$$\hat{Y}_{t+h} = Y_t$$

$t+h \Rightarrow h\sigma^2 n \ldots \sqrt{h}$

✓ **Modifikace modelu náhodných procházek:**

- Do modelu zahrneme trend
- Doplníme konstantu (deltu): $Y_t = \delta + Y_{t-1} + u_t$
  Rostoucí trend: $\delta > 0$
  Klesající trend: $\delta < 0$
- Modifikace prognózy: t+h
- Krátkodobá: $\hat{Y}_{t+h} = \delta + Y_t$
- Dlouhodobá: $\hat{Y}_{t+h} = Y_t + h\delta$

✓ **Chyba předpovědi E:**

$$Y_{t+h} = Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h} = Y_t + h\delta + \sum_{i=1}^{h} u_i - Y_t - h\delta = \sum_{i=1}^{h} u_i$$

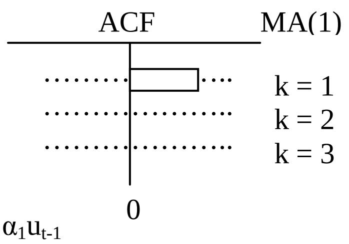
Lineárně roste s délkou prognostického horizontu h

Růst je funkcí, která je dána odmocninou.

Modely klouzavých průměrů (MA):

✓ Jedna z možností modelování dynamiky stacionárních časových řad

- ✓ Např. analýza vývoje změn cen akcií, kdy tato posloupnost změn cen s nulovým průměrem a konstantním rozptylem lze zapsat:
  - $Y_t = u_t$
  - u_t jsou identicky rozdělené náhodné složky, sériově nezkorelované. Odrážejí působení neočekávaných vlivů na cenu akcií, např. informace o finanční situaci podniku.
- ✓ Lze předpokládat, že všechny nové informace nejsou trhem absorbovány během 1 dne, proto změnu pro příští den lze vyjádřit jako: …
- ✓ $Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + u_t$
- ✓ Generování stochastickým procesem:
  $Y_t = u_t$
  u_t je charakteru bílého šumu s konstantním rozptylem: $E(u_t) = 0$; $Var(u_t) = \sigma^2 < \infty$
  Vážený průměr jednotlivých hodnot u_t: $Y_t = u_t + \alpha u_{t-1}$
- ✓ Proces klouzavých průměrů **MA(1)**: $Y_t = u_t + \alpha_1 u_{t-1}$
- ✓ **MA(q):** $Y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots + \alpha_r u_{t-q}$
- ✓ **Vlastnosti pro MA(1)** pro model, kdy máme posun v hodnotě μ (lze zobecnit pro MA(q)):
  $Y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1}$
  Zajímá nás:
  - **Průměr:** $E(Y_t) = \mu$
  - **Rozptyl:** $Var(Y_t) = \gamma_0 = \sigma_u^2 (1 + \alpha_1^2)$
    Kovariance: $Cov(Y_t, Y_{t+1}) = \gamma_1 = \sigma_u^2 \alpha_1$
    případně: $Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \gamma_1 = \sigma_u^2 \alpha_1$
  - $\gamma_k = \sigma_u^2 \alpha_1$ pro $k = 1$
    $\gamma_k = 0$ pro $k > 1$
    => Model MA(1) má paměť pouze **jedno období**
    Obecně model MA(q) má paměť **q období**.
  - Máme rozptyl a kovarianci => můžeme převést na korelační koeficient a určit hodnoty korelační funkce. Z výše uvedeného plyne jak volit délku zpoždění q:
    $$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1^2)} \text{ pro } k = 1$$
    $\rho_k = 0$ pro $k > 1$
    Tedy:
    $$\rho_k = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1^2} \text{ pro } k = 1$$
    $\rho_k = 0$ pro $k > 1$
  - **Graf – koreogram:**
    2.



  - $Y_t = u_t + \alpha_1 u_{t-1}$
    $u_t = Y_t - \alpha_1 u_{t-1}$
    $u_{t-1} = Y_{t-1} - \alpha_1 u_{t-2}$
    $u_t = Y_t - \alpha_1 (Y_{t-1} - \alpha u_{t-2})$
    $u_t = Y_t - \alpha_1 Y_{t-1} - \alpha_1^2 u_{t-2}$
    α_1^i pro $i \to \infty$ je rovna 0 za předpokladu, že $|\alpha_1| < 1$ => **podmínka invertibility**
  - **Invertibilita** znamená, že model lze vyjádřit pouze jedním způsobem, máme pouze jednu specifikaci.
    - Někdy model přímo napíše, že proces není invertibilní => lze to vyjádřit i jiným způsobem, ale my to nechceme.
    - Aby byl proces invertibilní, musí být korelační koeficient menší než 0,5.
      $|\rho_k| < 0,5$

Autoregresní modely (AR):

- ✓ Jiný přístup k modelování časové strukttury stacionárních časových řad.
- ✓ Vyjádření y_t jako funkce několika předcházejících pozorování.
- ✓ **AR(p):**

  AR(1) $\rightarrow Y_t = \delta + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$

  AR(p) $\rightarrow Y_t = \delta + \beta_1 Y_{t-1} + ... + \beta_p Y_{t-p} + u_t$

  Od u_t očekáváme charakter bílého šumu a stejné vlastnosti průměru, rozptylu a kovariance.
- ✓ **Vlastnosti AR(1):**

  $Y_t = \delta + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$

  $\mu = \delta + \beta_1 \mu$ => $\mu = \dfrac{\delta}{1-\beta_1}$

  - $Var(Y_t) = \gamma_0 = \dfrac{\sigma_u^2}{1-\beta_1^2}$
  - **Kovariance:** $\gamma_1 = \beta_1 \gamma_0$

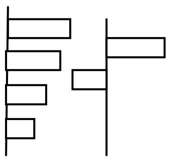
    $\gamma_2 = \beta_1^2 \gamma_0$

    …

    $\gamma_k = \beta_1^k \gamma_0$
  - Podmínka **stacionarity** časové řady je, že $|\beta_1| < 1$

    Vyjde-li blízko 1, je časová řada nestacionární.

    => $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0} = \beta_1^k$

    Zde místo ACF použijeme pro identifikaci délky zpoždění PACF.
- ✓ **Identifikační body:**
  - **MA** – určujeme na základě ACF
  - **AR** – určujeme na základě PACF
- ✓ **Zobecnění pro AR(p):**
  - $\mu = \dfrac{\delta}{1-\beta_1-\beta_2-...-\beta_p}$ => podmínka stacionarity časové řady Y_t je dána (splněna), když

    $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_p < 1$
  - $\sum_{i=1}^{p} \beta_i < 1$
  - $\gamma_0 = \dfrac{\sigma_u^2}{1-\beta_1+\beta_2^2+...+\beta_p^p}$

    $\gamma_k = \beta_1 \gamma_{k-1} + \beta_2 \gamma_{k-2} + ... + \beta_p \gamma_{k-p}$

    Apod.

    $\rho_k = \beta_1 \rho_{k-1} + \beta_2 \rho_{k-2} + ... + \beta_p \rho_{k-p}$