

2005-04-26

**VÍCEKRITERIÁLNÍ OPTIMALIZAČNÍ MODEL:****Vícekriteriální optimalizační model:**

- Ü Množina přípustných řešení je nekonečná
- Ü Alespoň dvě účelové funkce
- Ü Vícekriteriální lineární optimalizační model

$$z_1(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}$$

$$\mathbf{M}$$

$$z_k(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_k^T \mathbf{x} \rightarrow \text{MIN}$$

$$\frac{\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}}{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}}$$

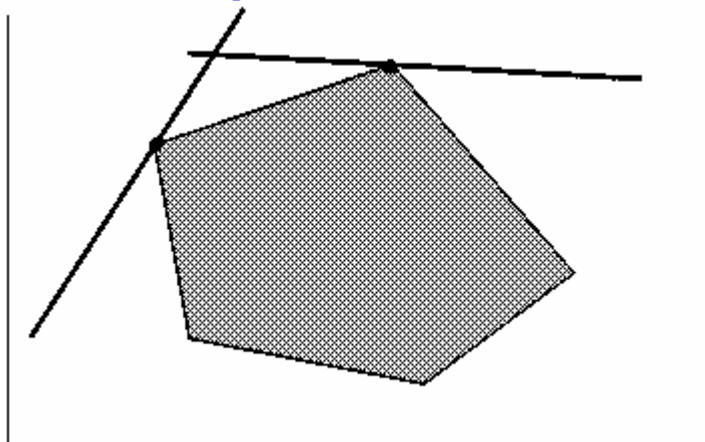
**Příklad: Vícekriteriální řezný plán**

Z desek 5x7 je potřeba nařezat obdélníky 2x3 a čtverce 1x1.					
Možné řezné plány:		A	B	C	Potřeba přerezů
	Obdélníky	0	5	4	100
	Čtverce	35	5	11	200
K dispozici je 70 desek.					
Kolik minimálně rozřezat desek, tak aby byl maximalizován počet obdélníků?					

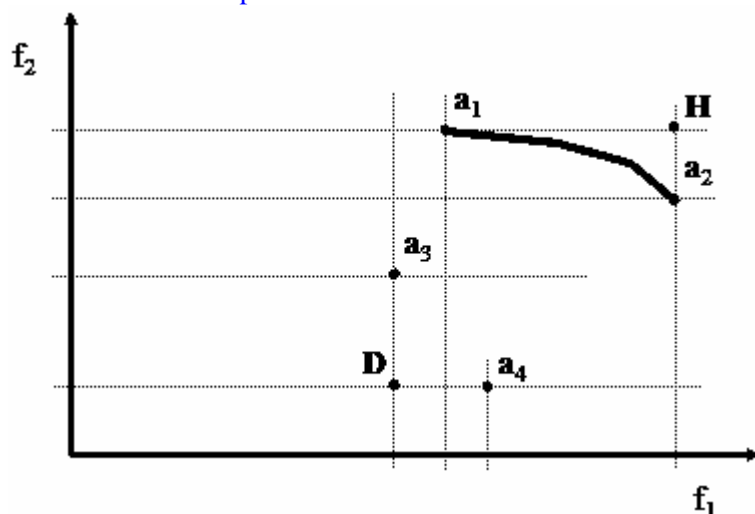
	A	B	C		
Celkem desek	1	1	1	<	70
Obdélníků	0	5	4	>	100
Čtverců	35	5	11	>	200
Min desek	1	1	1	MIN	
Max obdélníků	0	5	4	MAX	
			x1, x2, x3	>=	0

**Základní pojmy:**

- Ü Ideální a bazální varianta
- Ü Dominance řešení
- Ü Paretovské řešení
- Ü Kompromisní řešení
- Ü Kompenzace kritérií

**Grafické zobrazení problému I:**

## Grafické zobrazení problému II:



## Cíl řešení modelů:

- Ü Nalezení kompromisního řešení
- Ü Nalezení všech nedominovaných řešení
- Ü Většina metod umožňuje kompenzaci hodnot kritérií

## Typy informací:

- Ü Intrakriteriální preference – vždy kardinální – hodnoty kritériálních funkcí
- Ü Interkriteriální preference – váhy – důležitost jednotlivých kritérií
  - Žádná informace
  - Nominální informace – aspiračních úrovně
  - Ordinální informace – kvalitativní – uspořádání nutno převést na kardinální informaci
  - Kardinální informace – kvantitativní

## Metody řešení problému – hledání kompromisního řešení:

- Ü Dílčí (parciální) optimalizace
- Ü Agregace kritériálních funkcí pomocí vhodně zvoleného operátoru
- Ü Převod kritéria na vlastní omezení modelu
- Ü Cílové programování
- Ü Vícekriteriální simplexový algoritmus

## Dílčí optimalizace:

- Ü Řešíme tolik úloh, kolik je kritérií
- Ü Úloha  $U(j)$  má původní omezující podmínky a jednu kritériální funkci,  $j=1, \dots, k$

$$U(j): \quad z_j(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_j^T \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}$$


---


$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- Ü Získáme vlastně kritériální matici pro vícekriteriální analýzu variant – na diagonále ideální řešení, lze určit i bazální řešení
- Ü Využití spíše pro orientaci v problému

		Kritériální funkce			
		$z_1(\mathbf{x})$	$z_2(\mathbf{x})$	...	$z_k(\mathbf{x})$
Dílčí řešení	$\mathbf{x}^1$	$z_{11}$	$z_{12}$	...	$z_{1k}$
	$\mathbf{x}^2$	$z_{21}$	$z_{22}$	...	$z_{2k}$
	...	...	...	...	...
	$\mathbf{x}^k$	$z_{k1}$	$z_{k2}$	...	$z_{kk}$

**Příklad: Vícekriteriální řezný plán**

	A	B	C		
Celkem desek	1	1	1	<	70
Obdélníků	0	5	4	>	100
Čtverců	35	5	11	>	200
Min desek	1	1	1	MIN	
Max obdélníků	0	5	4	MAX	
			$x_1, x_2, x_3$	$\geq$	0

	A	B	C	Min desek	Max obdélníků
Min desek	2,857143	20	0	22,85714	100
Max obdélníků	0	70	0	70	350
Ideální řešení				22,85714	350
Bazální řešení				70	100

**Agregace kritériálních funkcí:**

Ü Agregované kritérium nemá obvykle ekonomickou interpretaci

Ü Typy agregace

- Součinnová či podílová
- Součtová či rozdílová
- Konvexní lineární kombinace kritérií

Ü Min kritéria nutno převést na max kritéria  $\min f(x) = \max (-f(x))$  nebo  $\min f(x) = \max 1/f(x)$

Ü Konvexní lineární kombinace kritérií – řešíme následující jednokriteriální úlohu s původními omezujícími podmínkami

$$Z(x) = \sum_{j=1}^k v_j c_j^T x = v^T Cx \rightarrow \text{MAX}$$


---


$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

**Příklad: Vícekriteriální řezný plán**

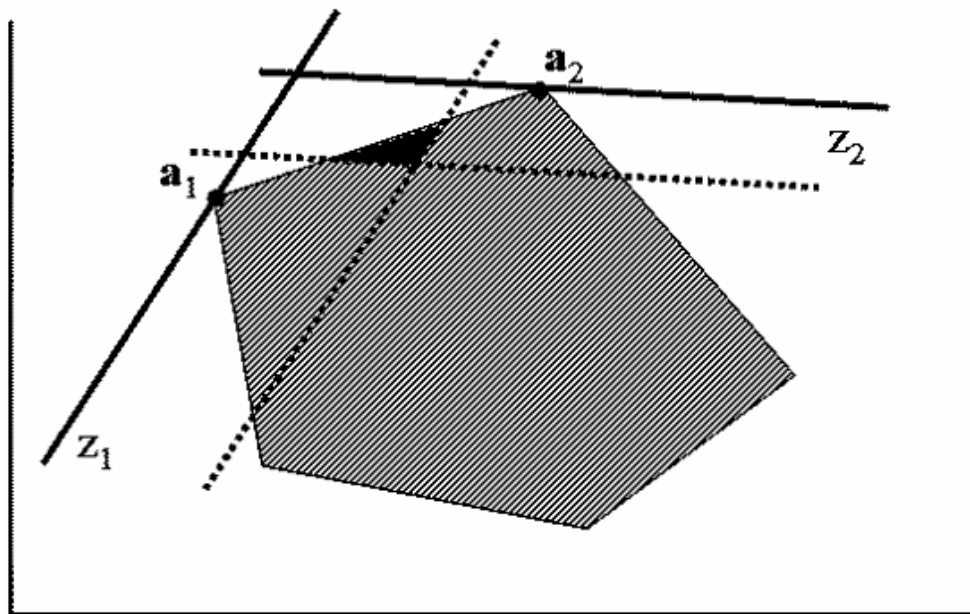
	A	B	C			
Celkem desek	1	1	1	<	70	
Obdélníků	0	5	4	>	100	
Čtverců	35	5	11	>	200	
Min desek	-1	-1	-1	MAX		5
Max obdélníků	0	5	4	MAX		1
Agregované kritérium	-5	0	-1	MAX		
			$x_1, x_2, x_3$	$\geq$	0	

	A	B	C	Min desek	Max obdélníků
Min desek	2,857143	20	0	22,85714	100
Max obdélníků	0	70	0	70	350
Ideální řešení				22,85714	350
Bazální řešení				70	100
Agregace 5:1	0	40	0	40	200

### Převod kritérií na omezení modelu:

- Ü Kteroukoli omezující podmínku lze formulovat jako kritériální funkci a naopak
- Ü Zvolíme nejdůležitější kritérium
- Ü Stanovíme požadované - aspirační úrovně ostatních kritérií
- Ü Řešíme jednokritériální úlohu s původními podmínkami a podmínkami zaručujícími požadované hodnoty upravených kritérií
- Ü Lze použít i iterační postup a kritéria upravovat postupně

### Grafické zobrazení kritérií a omezení:

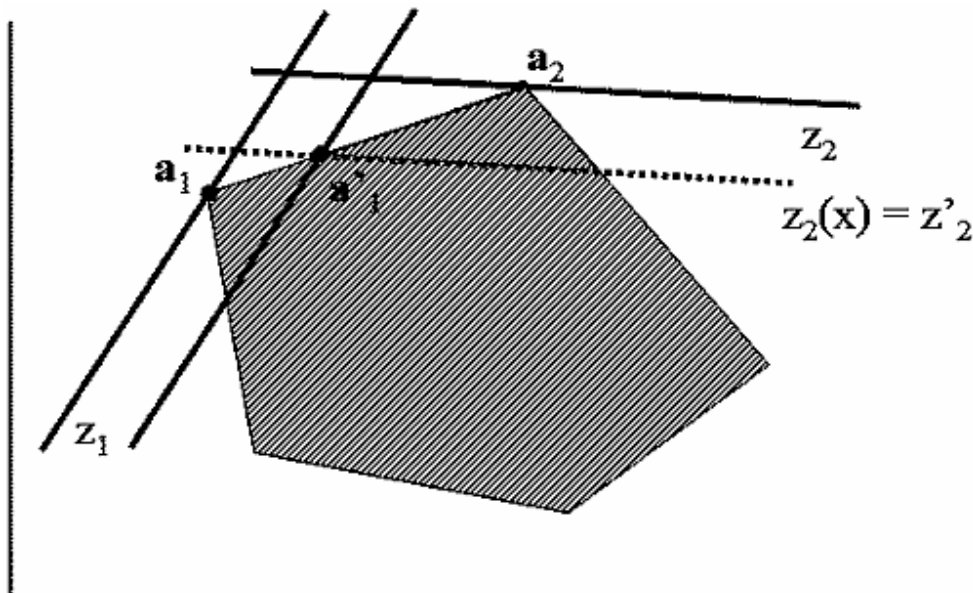


### Převod kritérií na omezení modelu:

- Ü Zvolíme kritérium  $z_1(x)$
- Ü Stanovíme požadované - aspirační úrovně ostatních kritérií  $z_j'$  (mezi ideálním a bazálním řešením) – pro max  $z_j(x) \geq z_j'$  a pro min  $z_j(x) \leq z_j'$
- Ü Řešíme jednokritériální úlohu (pro max kritéria)

$$\begin{array}{l} z_1(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ z_j(x) \geq z_j' \quad j = 2, \dots, k \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

### Grafické zobrazení nového modelu:



**Příklad: Vícekriteriální řezný plán**

	A	B	C		
Celkem desek	1	1	1	<	70
Obdélníků	0	5	4	>	100
Čtverců	35	5	11	>	200
Min desek	1	1	1	<	30
Max obdélníků	0	5	4	MAX	
			$x_1, x_2, x_3$	$\geq$	0

	A	B	C	Min desek	Max obdélníků
Min desek	2,857143	20	0	22,85714	100
Max obdélníků	0	70	0	70	350
Ideální řešení				22,85714	350
Bazální řešení				70	100
Agregace 5:1	0	40	0	40	200
Desek méně než 30	1,666667	28,33333	0	30	141,6667

**Cílové programování:**

- Ü Dosažení požadovaných hodnot kritérií
- Ü Minimalizace odchylek od cílových hodnot jednotlivých kritérií
- Ü Proměnné překročení
- Ü Proměnné nedosažení
- Ü Maximalizační kritérium může cílovou hodnotu překročit
- Ü Minimalizační kritérium může cílové hodnoty nedosáhnout

**Cílová podmínka:**

- Ü Dosažení požadované hodnoty kritéria pokud nelze, pak je hodnota kritéria
  - Buď překročena
  - Nebo nedosažena

$$c_i^T x = y_i^0$$

$$c_i^T x + d_i^- - d_i^+ = y_i^0$$

$$x \geq 0; d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0$$

$$d_i^- d_i^+ = 0,$$

**Cílové programování:**

$$Z(d) = \sum_{i=1}^k (v_i^- d_i^- + v_i^+ d_i^+) \rightarrow \min$$

za podmínek

$$c_i^T x + d_i^- - d_i^+ = y_i^0, i = 1, 2, \dots, k,$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0; d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0$$

$$d_i^- d_i^+ = 0,$$

$d_i^-$  a  $d_i^+$  jsou proměnné nedosažení a překročení  
 $v_i^-$  a  $v_i^+$  jsou jejich váhy

**Příklad: Vícekriteriální řezný plán**

Cílové programování	A	B	C	d1+	d1-	d2+	d2-		
Celkem desek	1	1	1					<	70
Obdélníků	0	5	4					>	100
Čtverců	35	5	11					>	200
Min desek	1	1	1	1	-1			=	30
Max obdélníků	0	5	4			1	-1	=	250
Min odchylek				1	1	1	1	MIN	
				x1, x2, x3, d+, d-				>=	0

	A	B	C	Min desek	Max obdélníků
Min desek	2,857143	20	0	22,85714	100
Max obdélníků	0	70	0	70	350
Ideální řešení				22,85714	350
Bazální řešení				70	100
Agregace 5:1	0	40	0	40	200
Desek méně než 30	1,666667	28,33333	0	30	141, 6667
Cíl 30/250	0	50	0	50	250