2005-04-05

OBECNÉ OPTIMALIZAČNÍ MODELY:

Historická poznámka:
- Nalezení extrému funkce pomocí metod matematické analýzy – derivace atd.
- Praktické aplikace – omezení definičního oboru funkce

Úloha na volný extrém:
- Min {f(x) / x $\in$ Df }, kde Df je definiční obor funkce f(x).
- Minimální hodnota funkce na celém definičním oboru.

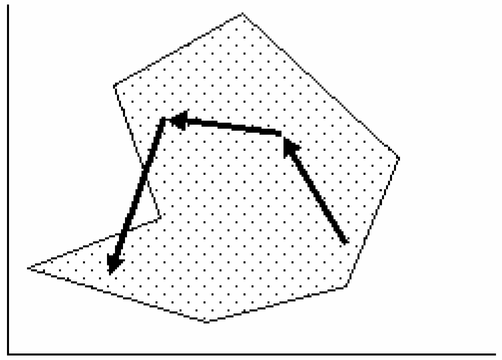
Úloha na vázaný extrém:
- Min {f(x) / x $\in$ M}
- Úloha nalezení extrému funkce podél křivky.

Optimalizační úloha:
- Min {f(x) / $q_i(x) \leq 0$, i = 1, ..., m
- $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$}
- f(x) a qi (x) jsou reálné funkce více proměnných a x je prvek vektorového prostoru Rn.

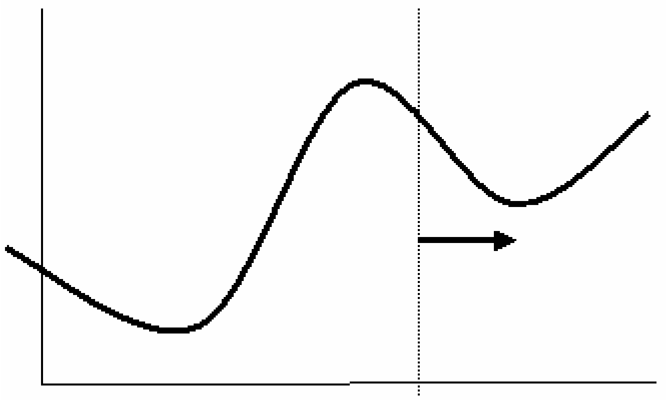
Klasifikace optimalizačního modelu:
- Z hlediska počtu kritérií:
  - Jednokriteriální optimalizační model
  - Vícekriteriální optimalizační model
- Z hlediska typu kritéria:
  - Minimalizační model: f(x) -> MIN
  - Maximalizační model: f(x) -> MAX
  - Cílový model – dosažení cíle f(x) = h
- Podle typu použitých funkcí:
  - Lineární optimalizační model
  - Nelineární optimalizační model
    - Konvexní model – kvadratický konvexní model – vždy má globální minimum.
      Konvexní optimalizační model je model, jehož množina přípustných řešení je konvexní a účelová funkce je konvexní, pokud hledáme minimum, nebo konkávní, pokud hledáme maximum.
    - Nekonvexní model

Možnosti řešení optimalizačních úloh:
- Nalezení vektoru x splňujícího omezující podmínky $q_i(x) \leq 0$, i = 1, …, m
- Nalezení minimální hodnoty účelové funkce f(x)
- Grafický přístup
- Analytické metody
- Numerické metody

Nalezení přípustného řešení:



Nalezení extrému účelové funkce:



Analytické metody:

- Lagrangeova funkce: $L(x, u) = f(x) + u^T . q(x)$
  u – lagrangeův multiplikátor
- Sedlový bod: $L(x_{opv}, u) \leq L(x_{opv}, u_{opt}) \leq L(x, u_{opt})$
  Jsme schopni najít řešení optimalizační úlohy právě tehdy, když najdeme sedlový bod Lagrangeovy funkce.
- Kuhn-Tuckerovy podmínky – vlastnosti sedlového bodu
- Wolfeho algoritmus pro řešení kvadratických optimalizačních úloh

Kuhn-Tuckerovy podmínky:

- Kuhn-Tuckerovy podmínky – vlastnosti sedlového bodu
- Konvexní optimalizační úloha má řešení x_{opt} právě tehdy, když existuje vektor u_{opt} a platí:

$$x_{opt} \geq 0 \wedge u_{opt} \geq 0$$

$$\frac{\partial L(x_{opt}, u_{opt})}{\partial u_i} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\frac{\partial L(x_{opt}, u_{opt})}{\partial x_j} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$u_i^{opt} \cdot \frac{\partial L(x_{opt}, u_{opt})}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j^{opt} \cdot \frac{\partial L(x_{opt}, u_{opt})}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Kvadratická úloha:

min $\{x^TCx + p^Tx \mid Ax \leq b, x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n, x$ náleží $R^n\}$

- C – matice koeficientů kvadratických členů účelové funkce
- p – vektor koeficientů lineárních členů v účelové funkci
- A – matice koeficientů soustavy omezujících podmínek
- b – vektor pravých stran těchto podmínek

Wolfeho podmínky:

- Úprava Kuhn-Tuckerových podmínek pro kvadratickou optimalizační úlohu
- Lineární podmínky:
  - $Ax + y = b$
  - $-Cx - A^Tu + v = p$
  - $x \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, y \geq 0$
- Nelineární kvadratické podmínky:
  - $u_{opt}^T y_{opt} + x_{opt}^T v_{opt} = 0$

Pomocná optimalizační úloha:

- Lineární omezující podmínky:
  $Ax + y = b$
  $Cx + A^Tu - v + w = -p$
- Podmínky nezápornosti:
  $x \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, y \geq 0, w \geq 0$

- Účelová funkce:
  $w_1 + w_2 + ... + w_n \rightarrow$ min.
- Dodatečná nelineární podmínka:
- $u_{opt}^T\ y_{opt} + x_{opt}^T v_{opt} = 0$

Řešení pomocné optimalizační úlohy:
- Simplexový algoritmus pro lineární část
- Rozšíření testu optimality – vstup proměnných do báze
- Výpočet se liší podle hodnot ve vektorech **p** a **b**

Wolfeho algoritmus:
- 1. krok – Kuhn-Tuckerovy podmínky
- 2. krok – Wolfeho podmínky
- 3. krok – Pomocná lineární optimalizační úloha
- 4. krok – Optimální řešení původní kvadratické úlohy

Vektor x_{opt} získaný jako řešení Wolfeho podmínek je optimálním řešením původní kvadratické optimalizační úlohy. Hodnotu kriteriální funkce vypočítáme dosazením, tedy $z_{opt} = f(x_{opt}) = x^T Cx + p^T x$.

Numerické metody:
- Gradientní metody: $x_{k+1} = x_k + \lambda_k . s_k$
- Penalizační a bariérové metody: min $\{f(x) + p_k(x) \,/\, x \in R^n\}$
- Heuristické metody