2005-03-08

SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS:

Lineární optimalizační model:
- Optimální rozsahy procesů
- Splnění omezení
- Maximalizace či minimalizace hodnoty kritéria

Definice modelu:
Všechny prvky modelu jsou vyjádřeny pomocí lineárních funkcí:

$z(x) = c^T x \rightarrow MIN$

$$\left. Ax \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b \right\} \text{ Každý řádek = jedna omezující podmínka}$$

$$x \ge 0$$

Příklad: Optimální řezný plán

Z desek 5x7 je potřeba nařezat obdélníky 2x3 a čtverce 1x1. Možné řezné plány:

	A	B	C	Potřeba přířezů
Obdélníky	0	5	4	100
Čtverce	35	5	11	200

Kolik minimálně rozřezat desek?

$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 \rightarrow MIN$
$0x_1 + 5x_2 + 4x_3 \ge 100$
$35x_1 + 5x_2 + 11x_3 \ge 200$
$x_{1,2,3} \ge 0$

x_1	x_2	x_3		
0	5	4	>=	100
35	5	11	>=	200
1	1	1	MIN	
		x_1, x_2, x_3	>=	0

Řešitelnost modelu:
- **Řešení neexistuje:**
  - Neexistuje řešení omezujících podmínek
  - Kriteriální funkce je omezená v požadovaném směru
- **Existuje právě jedno řešení** – jediné a bázické
- **Existuje nekonečně mnoho řešení** – dvě a více bázická optimální (alternativní) řešení

Soustava omezujících podmínek:
- Numericky umíme řešit pouze soustavy lineárních rovnice, nikoliv nerovnic
- Jordanova eliminační metoda – bázické řešení

$$Ax \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b \qquad \text{převedeme na} \qquad \tilde{A}x = b$$

Kapacitní podmínky:
- $Ax \le b$
- $Ax + Ed = b$, $d \ge 0$ -> doplňkové proměnné

Ax	Ed	b

Požadavkové podmínky:
- $Ax \ge b$
- $Ax - Ed + Ep = b$, $d \ge 0$ -> doplňkové proměnné

Ax	-Ed	Ep	b

Podmínky v rovnicovém tvaru:

- Určení, bilanční apod.
- Ax = b
- Ax + Ep = b, p ≥ 0 -> pomocné proměnné

Ax	Ep	b

Postup řešení modelu:

Simplexový algoritmus:

- Nalezení řešení soustavy omezujících podmínek - Jordanova eliminační metoda
- Nalezení optimálního řešení

Jordanova eliminační metoda:

- Povolené eliminační úpravy
- Násobení řídící rovnice převrácenou hodnotou řídícího prvku
- Přičtení vhodného násobku řídící rovnice k upravované rovnici

Bázické řešení:

- Kanonický tvar soustavy rovnic
- Proměnné s jednotkovými vektory – bázické
- Jestliže A = (A_N, E), x = (x_N, x_B) = (0, b), pak A.x = A_N.x_N + E.x_B = b

x_N x_B		
A_N E b		

Test optimality:

- Existuje lepší řešení?
- Cena ekvivalentní lineární kombinace $z_j - c_j = \sum_i \alpha_{ij}.c_i - c_j$
  $z_j - c_j \geq 0$ -> skutečná cena nižší než bázická
  $z_j - c_j \leq 0$ -> skutečná cena vyšší než bázická
- Celková změna ceny -> $x_j.(z_j - c_j)$
- Nutně musí být x_j nezáporné (nebo nekladné)

Test optimality – odvození:

$$\boldsymbol{x}^p = (\boldsymbol{x}_N^p, \boldsymbol{x}_B^p)^T = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\beta})^T$$

$$z(\boldsymbol{x}^p) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^p = \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N^p + \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B^p = \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{0} + \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B^p = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B^p = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{\beta}$$

$$\boldsymbol{x}^{p+1} = (\boldsymbol{x}_N^{p+1}, \boldsymbol{x}_B^{p+1})^T = (\boldsymbol{0}, x_k, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_k x_k)^T$$

$$z(\boldsymbol{x}^{p+1}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{p+1} = \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N^{p+1} + \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B^{p+1} = \boldsymbol{c}_N^T(\boldsymbol{0}, x_k, \boldsymbol{0})^T + \boldsymbol{c}_B^T(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_k x_k) = \\ = c_k x_k + \boldsymbol{c}_B^T(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_k x_k)$$

$$z(\boldsymbol{x}^{p+1}) - z(\boldsymbol{x}^p) = c_k x_k + \boldsymbol{c}_B^T(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}_k x_k) - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{\beta} = (c_k - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{\alpha}_k)x_k = \\ = -(\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{\alpha}_k - c_k)x_k = -(z_k - c_k)x_k$$

Test přípustnosti:

- Splnění omezujících podmínek
- Nezápornost řešení pro vybrané xj ≥ 0
  $x_i = b_i - a_{ij}.x_j \geq 0$
  $a_{ij} > 0$ ... x_j £ b_j / a_{ij}
  $a_{ij} \leq 0$ ... platí vždy

Test přípustnosti – odvození:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ x_k \\ \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} x_k \end{pmatrix}$$

$$x_i = \beta_i - \alpha_{ik} x_k \geq 0, \forall i \in B.$$

$$pokud\ \alpha_{ik} \geq 0\ pak\ x_k \leq \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$$

Simplexový algoritmus:

- Podmínky algoritmu: =, b ≥ 0, kanonická báze
- Simplexová tabulka
- Test optimality
- Test přípustnosti
- Nové bázické řešení – JEM

Simplexová tabulka:

A	B b	
$c^T_B..A - c^T$	$c^T_B B - c^T$ $c^T_{B.}b$	

Příklad: Optimální řezný plán

Optimální řešení:

- 2,857 desek podle prvního řezného plánu – alternativa 0 desek
- 20 desek podle druhého řezného plánu – alternativa 8,57 desek
- 0 desek podle třetího řezného plánu – alternativa 14,28 desek