2004-12-13

X a Y jsou nezávislé => $\rho(X, Y) = 0$
$\rho(X, Y) = 0$ => X a Y jsou nekorelované (korelační koeficient = 0) – mezi veličinami X a Y neexistuje lineární závislost, může však existovat závislost nelineárního typu.
Jestliže veličiny X a Y jsou nekorelované a mají normální rozdělení, potom jsou také nezávislé.
Jestliže veličiny X a Y nejsou nezávislé, pak jsou také nekorelované, tzn. že $\rho(X, Y) = 0$.

Nezávislost => nekorelovanost
Nekorelovanost => nezávislost obecně neplatí

Nezávislost náhodných veličin:

Budeme říkat, že náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, jestliže $F(x, y) = F_1(x) \,.\, F_2(y)$.
Jestliže veličiny X a Y jsou diskrétní, lze kritérium jejich nezávislost vyjádřit ve tvaru $p_{jk} = p_{j.} \,.\, p_{.k}$.
Jestliže veličiny X y Y jsou spojité, lze jejich kritérium nezávislých vyjádřit ve tvaru $\mathbf{f(x, y) = f_1(x) \,.\, f_2(y)}$.

þ Př.:
Při výrobcích měříme délku s přesností +-0,5 mm a šířku s přesností +-0,2 mm.
X – chyba při měření délky
Y – chyba při měření šířky
Sdružená hustota pravděpodobnosti f(x, y) v mezích jednotlivých chyb je rovnoměrně rozdělená.

$$f(x, y) = \begin{cases} k & -0{,}5 < x < 0{,}5;\ -0{,}2 < y < 0{,}2 \\ 0 & \text{Jinde} \end{cases}$$

Vypočítejte:
1. Konstantu A
2. Marginální hustotu pravděpodobnosti
3. Vyšetřete nezávislost veličin X a Y

1.
a) $f(x, y) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = K \,.\, \int_{-0{,}5}^{0{,}5} dy \int_{-0{,}2}^{0{,}2} dx = 0{,}4K = 1$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2{,}5 & -0{,}5 < x < 0{,}5;\ -0{,}2 < y < 0{,}2 \\ 0 & \text{Jinde} \end{cases}$$

2.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) = \int_{-0{,}2}^{0{,}2} 2{,}5\, dy = 2{,}5 \,.\, 0{,}4 = 1$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & -0{,}5 < x < 0{,}5 \\ 0 & \text{Jinde} \end{cases}$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} 2{,}5\, dx = 2{,}5 \,.\, 1 = 2{,}5$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2{,}5 & -0{,}2 < y < 0{,}2 \\ 0 & \text{Jinde} \end{cases}$$

3.

$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = 1 \cdot 2{,}5 = 2{,}5 \qquad -0{,}5 < x < 0{,}5$

$-0{,}2 < y < 0{,}2$

Podmíněná rozdělení (zákony):

Podmíněným rozdělením jedené veličiny daného systému (X, Y)’ je její rozdělení definované za podmínky, že druhá náhodná veličina nabývá konstantní hodnoty.

Jestliže veličiny X a Y jsou diskrétní, lze podmíněné rozdělení vyjádřit takto:

$$p_{j/,k} = P(X = x_j/Y = y_k) = \frac{P(X = x_j, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{p_{j,k}}{p_{.k}}$$

$$p_{k/j} = P(X = y_k/Y = x_j) = \frac{P(X = x_j, Y = y_k)}{P(X = x_j)} = \frac{p_{j,k}}{p_{j.}}$$

Jestliže veličiny X a Y jsou spojité, lze příslušné podmíněné rozdělení vyjádřit takto:

$$f_{x/y} = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \text{ jestliže } f_2(y) > 0$$

$$f_{y/x} = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \text{ jestliže } f_1(x) > 0$$

$f_{x/y}$ – podmíněná hustota veličiny X za podmínky Y = y

$f_{y/x}$ – podmíněná hustota veličiny Y za podmínky X = x

Jsou-li všechna podmíněná rozdělení rovna nepodmíněným (marginálním) rozdělením, jsou veličiny X a Y nezávislé.

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{pro x náleží } \langle 0, 1\rangle, \text{ y náleží } \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{Jinde} \end{cases}$$

$f_{x/y} = ?$

$f_{y/x} = ?$

$$f_{x/y} = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

$$f_{y/x} = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} x + \tfrac{1}{2} & \text{pro x náleží } \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{pro x nenáleží } \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} y + \tfrac{1}{2} & \text{y náleží } \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{y nenáleží } \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$

$$f_{x/y} = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{x + y}{y + \tfrac{1}{2}} = \frac{2(x + y)}{2y + 1}$$

$$f_{y/x} = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{x + y}{x + ½} = \frac{2(x + y)}{2x + 1}$$

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$, $n \geq 2$
$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \,.\, F_2(x_2) \,.\, \ldots \,.\, F_n(x_n)$
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \,.\, f_2(x_2) \,.\, \ldots \,.\, f_n(x_n)$