

2004-10-25

NÁHODNÉ VELIČINY:**Typy náhodných veličin:**

- Ü **Diskrétní (nespojité)** náhodné veličiny – může nabývat hodnot od sebe navzájem izolovaných, např. počet cestujících přepravených autobusem za určitou dobu, počet zrn v klasu
- Ü **Spojité** náhodné veličiny – při zakreslení na osu by to byla přímka, mohou nabývat všech hodnot

Formy vyjádření zákona rozdělení náhodné veličiny => rozdělení náhodné veličiny:

Je to předpis, který určuje vztah mezi možnými hodnotami náhodné veličiny a množinou pravděpodobností výskytu.

- Ü **Řada rozdělení** – existuje pouze pro diskrétní náhodné veličiny

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

x_1, x_2, x_n – všechny možné hodnoty dané diskrétní náhodné veličiny X

$p_i = P(X = x_i); i = 1, 2, \dots, n$

X – počet hodů na hrací kostce

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\sum p_i = 1$$

- Ü **Distribuční funkce** – univerzální forma zákona rozdělení, které existuje pro diskrétní i spojité náhodné veličiny

$F(x) = P(X < x); -\infty < x < \infty$

X – náhodná veličina

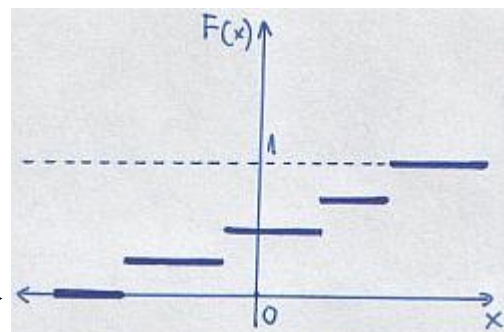
x – předem zvolená hodnota

Vlastnosti $F(x)$:

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$
V
 $F(\infty) = P(X < \infty) = 1$
U
- Distribuční funkce je vždy neklesající, $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Grafické vyjádření distribuční funkce:

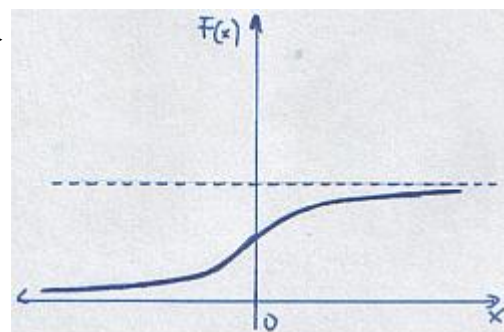
- Distribuční funkce diskrétní veličiny →
– je nespojitá, neklesající:
- Distribuční funkce spojité náhodné veličiny: →



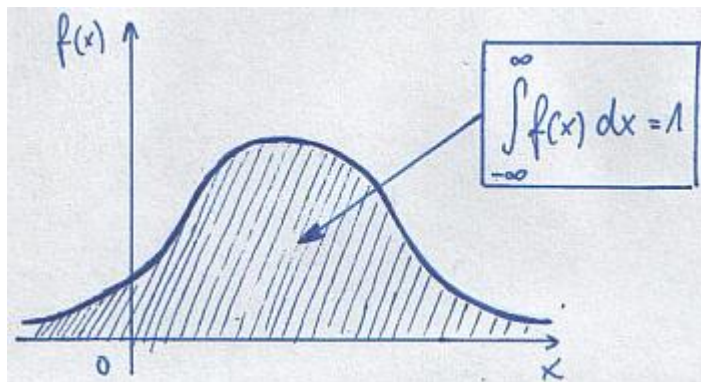
- Forma vyjádření zákona rozdělení pouze pro spojité náhodné veličiny – hustota pravděpodobnosti (hustota) (density):

$$f(x) = F'(x); -\infty < x < \infty \quad (\text{derivate})$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

**Vlastnosti hustoty $f(x)$:**

- $f(x) \geq 0$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$



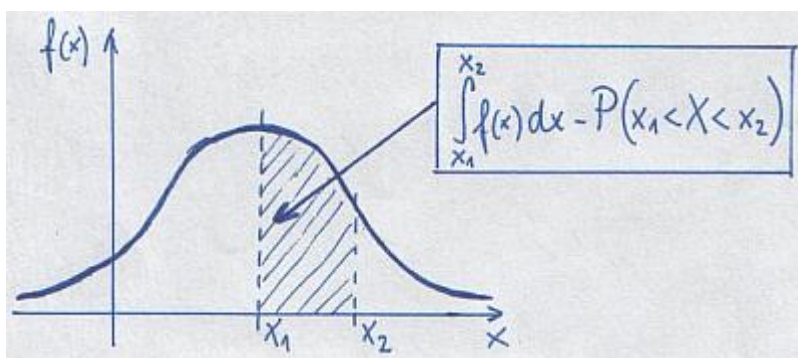
Paradox nulové pravděpodobnosti – vlastnost pouze spojitých náhodných veličin:

X – spojitá náhodná veličina, K – libovolná konstanta

$$P(X = k) = 0$$

Pro spojitě veličiny platí:

$$\bullet \quad P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$



Číselné charakteristiky náhodných veličin:

Ü Jsou to čísla, která ve stručné koncentrované formě podávají informaci o nejdůležitějších vlastnostech náhodné veličiny.

Ü **Charakteristiky polohy** (úrovně) – podávají informaci o typické (středové) hodnotě dané náhodné veličiny, dobře zastupuje všechny hodnoty náhodné veličiny (průměrná spotřeba auta, průměrná teplota za nějaké období), nedodává však dokonalou informaci, odlišují se svou variabilitou:

-1, 0, 1

Průměr je u obou 0, ale variabilita (rozptíl) je různá.

-1000, 0, 1000

Střední hodnota náhodné veličiny:

$$\bullet \quad E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i; \quad X - \text{diskrétní náhodná veličina}$$

$$\bullet \quad E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx; \quad X - \text{spojitá náhodná veličina}$$

• E z „expected value“ = očekávaná veličina

Ü **Charakteristiky variability:**

Rozptyl náhodné veličiny:

$$\bullet \quad D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - [E(x)]^2; \quad X - \text{diskrétní náhodná veličina}$$

$$\bullet \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [E(x)]^2; \quad X - \text{spojitá náhodná veličina}$$

$$\bullet \quad D(X) = 0$$

$$D(X) \geq 0$$

• Rozptyl v nesrozumitelných jednotkách, např. průměrná teplota $6^\circ\text{C}^2 \Rightarrow$ směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka:

$$\bullet \quad G(X) = \sqrt{D(X)}$$

Př.: Investor má možnost volby mezi dvěma investicemi. Pravděpodobnostní rozdělení zisku z obou investic je v následující tabulce:

1. investice		2. investice	
Zisk [%] – x_i	Pravděpodobnost – p_i	Zisk [%] – x_i	Pravděpodobnost – p_i
5	0,05	-25	0,20
10	0,30	0	0,20
15	0,50	25	0,30
20	0,15	50	0,30

Vypočítejte základní číselné charakteristiky a interpretujte dosažené výsledky.

X – zisk (diskrétní veličina)

1. investice

$$E(X) = \sum x_i p_i = 5 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,30 + 15 \cdot 0,50 + 20 \cdot 0,15 = 13,75\%$$

$$D(X) = \sum x_i^2 p_i - [E(x)]^2 = (5^2 \cdot 0,05 + 10^2 \cdot 0,30 + 15^2 \cdot 0,50 + 20^2 \cdot 0,15) - 13,75^2 = 14,6875[\%]^2$$

$$G(X) = \sqrt{D(X)} = 3,83\%$$

2. investice

$$E(X) = \sum x_i p_i = (-25) \cdot 0,20 + 0 \cdot 0,20 + 25 \cdot 0,30 + 50 \cdot 0,30 = 17,5\%$$

$$D(X) = \sum x_i^2 p_i - [E(x)]^2 = ((-25)^2 \cdot 0,20 + 0^2 \cdot 0,20 + 25^2 \cdot 0,30 + 50^2 \cdot 0,30) - 17,5^2 = 756,25[\%]^2$$

$$G(X) = \sqrt{D(X)} = 27,5\%$$