TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

2004-10-06

Permutace – uspořádané n-tice z daných n prvků
– skupiny, které obsahují všechny dané prvky a liší se od sebe pouze jejich pořádkem

Počet permutací s opakováním: $P'(k_1;k_2;\dots k_n) = \dfrac{(k_1+k_2+\dots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}$

Počet permutací bez opakování: $P(n) = n!$

Variace k-té třídy z n prvků:
– pod variacemi rozumíme skupinu k prvků vybraných s určitým pořadím z daných n prvků.

Variace s opakováním: $V'(k;n) = n^k$

Variace bez opakování: $V(k,n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Kombinace k-té třídy z n prvků:
– skupina k prvků vybraných z n prvků bez ohledu na jejich uspořádání

Kombinace s opakováním: $C'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$

Kombinace bez opakování: $C(k,n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Vlastnosti kombinačních čísel:

$\binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$ pro všechna přirozená n

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

BINOMICKÁ VĚTA:

$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

BINOMICKÝ ROZVOJ:

$\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$

- Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet permutací bez opakování dvacetkrát. Kolik je prvků?

$$P(n+2) = 20\,P(n)$$
$$(n+2)! = 20\,n!$$
$$(n+2)(n+1) = 20$$
$$n^2 + 3n - 18 = 0$$
$$\underline{\underline{n_1 = 3}}$$
$$n_2 = -6$$ – počet prvků nemůže být záporný!

- Kolik různých dvojciferných čísel je možno sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, když se nemá ani v jednom čísle číslice opakovat?

$$V_5^2 = \frac{5!}{3!} = \underline{\underline{20}}$$

- Ve třídě je 14 děvčat a 18 chlapců. Kolika způsoby lze zvolit 3 zástupce třídy, když to mají být:

a) jen chlapci: $C_{18}^3 = \binom{18}{3} = \frac{18!}{3!\,15!} = \underline{\underline{816}}$

b) jen dívky: $C_{14}^3 = \binom{14}{3} = \frac{14!}{3!\,14!} = 364$

c) 2 chlapci a 1 dívka: $C_{18}^2 \cdot C_{14}^1 = \binom{18}{2} \cdot \binom{14}{1} = \frac{18!}{2!\,18!} \cdot \frac{14!}{1!\,14!} = \underline{\underline{2142}}$ $\quad C_{18}^2 \oplus C_{14}^1$ – volíme 2 chlapce NEBO 1 dívku

- Na kotouči bezpečnostní schránky je 12 písmen a heslo k otevření bezpečnostní schránky má 5 písmen. Kolik nezdařených pokusů může provést ten, kdo toto heslo nezná?

$$V_{12}^{15} = 12^5 = 248832$$
$$V_{12}^5 - 1 = \underline{\underline{248831}}$$

- Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

$$\binom{20}{2} + \binom{20}{19} \qquad \binom{20}{2} = \binom{20}{18} \qquad \binom{20}{19} = \binom{20}{1}$$

$$= \underset{k}{\binom{20}{18}} + \underset{k+1}{\binom{20}{19}} = \underline{\underline{\binom{21}{19}}} \qquad = \underset{k+1}{\binom{20}{2}} + \underset{k}{\binom{20}{1}} = \underline{\underline{\binom{21}{2}}}$$

- Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

$$\binom{5}{5}+\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}$$

$$\Downarrow \wedge \Downarrow$$

$$\binom{6}{6}+\binom{6}{5}=\binom{7}{6}+\binom{7}{5}=\binom{8}{6}+\binom{8}{5}=\underline{\binom{9}{6}}$$

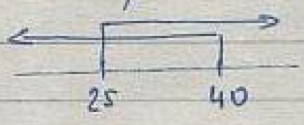
NÁHODNÉ JEVY A RELACE MEZI NIMI

$A \subset B$	jev A je částí jevu B; jev A má za následek nastoupení jevu B - implikace
$A=B \Rightarrow A\subset B$ a $B\subset A$	jevy A a B jsou rovnocenné
$A \cup B$	výskyt alespoň jednoho z jevů A a B - sjednocení
$A \cap B$	současný výskyt jevu A a B - průnik
$\bar{A}$	jev opačný
$A \cap \bar{A} = V$ $(\emptyset)$	jev nemožný
$A \cup \bar{A} = U$ (Ω)	jev jistý
$A \cap B = V$ $(\emptyset)$	jevy neslučitelné - výskyt jednoho jevu vylučuje výskyt druhého jevu

- Jev A - hmotnost náhodně vybraného zrna pšenice je větší než 25g.
  Jev B - hmotnost náhodně vybraného zrna pšenice je menší než 40g.
  Definujte průnik a sjednocení těchto jevů.

  $A \cap B = (25, 40)$

  $A \cup B = U$ $(0; \infty)$



- A, B, C - libovolné náhodné jevy
  a) nastal jenom jev A: $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
  b) nastal jev A a B, nenastal jev C: $A \cap B \cap \bar{C}$
  c) nastaly všechny 3 jevy: $A \cap B \cap C$
  d) nastal alespoň jeden jev: $A \cup B \cup C$
  e) nastaly alespoň 2 jevy: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
  f) nastal právě jeden jev: $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$
  g) nastaly 2 jevy: $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$
  h) nenastal ani jeden jev: $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

i) nastaly nejvýše 2 jevy:

$$(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup\left[(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\right]\cup\left[(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap C)\cup\right.$$
$$\left.\cup(\bar{A}\cap B\cap C)\right] = \Omega-(A\cap B\cap C)$$

- jev A – série výrobků bez zmetků
  jev B – alespoň 1 výrobek v sérii je zmetek
  $A\cap B = V$ $(\emptyset)$
  $A\cup B = U$ (Ω)