2004-03-01

2. VÝROKOVÝ POČET, BOOLEOVSKÁ ALGEBRA, DNF, KNF

2.1 Výrokový počet a booleovská algebra

Výrok – každá oznamovací věta (sdělení), o které lze rozhodnout, zda je pravdivá.
ü Výrokem je: Prší. Svítí sluníčko.
ü Výrokem není: Kéž by pršelo!

Pravdivostní hodnoty:
ü Pravda (true) – značíme 1 nebo t
ü Nepravda (false) – značíme 0 nebo f

Elementární výrok (logická nebo výroková **proměnná**) – základní výrok, jehož struktura se dále nedělí.
- značíme malými písmeny: **a, b, c, …, x, y, z**

Složený výrok (logická nebo výroková **formule**) – spojení elementárních výroků pomocí závorek a logických spojek.
- značíme velkými písmeny: **A, B, C, …, X, Y, Z**

Booleovské proměnné mohou nabývat hodnot 0 a 1 a značí se malými písmeny: **a, b, c, …, x, y, z, …**

Booleovská algebra je dvouelementová množina {0,1}, na které jsou definovány *operace součtu* (+) , *součinu* (·) , a *doplňku* (´)
ü Logický součin $x \cdot y$ $= \min(x, y)$
ü Logický součet $x + y$ $= \max(x, y)$
ü Doplněk x' $= 1 - x$

2.2 Logické spojky

Negace **Ø a** **a´**, $\overline{a}$
„formule ¬ a je pravdivá právě tehdy, když a je nepravdivá“

a	**Ø a**
0	1
1	0

Konjunkce **a Ù b** **a . b**
„formule a ∧ b je pravdivá právě tehdy, když a i b jsou obě pravdivé“
Disjunkce **a Ú b** **a + b**
„formule a ∨ b je pravdivá právě tehdy, když aspoň jedna z proměnných a nebo b je pravdivá“
Implikace **a Þ b** **a É b**
„formule a ⇒ b je pravdivá právě tehdy, když buď není splněn předpoklad a nebo je splněn závěr b“
Ekvivalence **a Û b** **a = b**
„formule a ⇔ b je pravdivá právě tehdy, když buď obě proměnné a i b jsou pravdivé nebo obě jsou nepravdivé“
Negace ekvivalence **a Å b** **a ¹ b**
„formule a ⊕ b je pravdivá právě tehdy, když je pravdivá právě jedna z proměnných a nebo b“
Shefferův operátor **a - b**
„formule a ↑ b je pravdivá právě tehdy, když je aspoň jedna z proměnných a nebo b nepravdivá“
Piercova šipka **a ¯ b**
„formule a ↓ b je pravdivá právě tehdy, když jsou obě proměnné a i b zároveň nepravdivé“
Tautologie **T** **1**
„tautologie je pravdivá pro všechna ohodnocení proměnných a a b“
Kontradikce **F** **0**
„kontradikce je nepravdivá pro všechna ohodnocení proměnných a a b“

a	**b**	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	**1**	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	**0**	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
výrok. počet		**F**	Ù		**a**		**b**	Å	Ú	¯	Û °	**Øb**	Ü	**Øa**	Þ	**-**	**T**
bool. algeb.		**0**	·		**a**		**b**	¹ Å	+	¯	=	**b´**	¬ Ì	**a´**	® É	**-**	**1**

Příklady:

ü **Pomocí pravdivostní tabulky rozhodněte, zda následující formule jsou tautologie, kontradikce nebo splnitelné.**

1. ((p ∨ q) ∧ p) ≡ p

((p	Ú	**q)**	Ù	**p)**	°	**p**
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
	1.		2.		Výsl.	

Tato formule je tautologie.

2. ((p ∧ q) ∧ (¬p → q)) → q
3. ((p ∨ ¬q) ↑ (p → q)) → q
4. (p ∨ ¬q) ⊕ (q → p)
5. ¬(p → q) ⊕ (p ∧ ¬q)
6. (p ↑ q) → ((p ⊕ r) ∨ (q ⊕ r))
7. ((p ⊕ r) ↓ (¬p ∧ ¬q)) ∧ (p ↓ q)

ü **Pomocí pravdivostní tabulky rozhodněte o správnosti následujících úsudků:**

8. Buď je examinátor shovívavý a nebo je kurs neužitečný. Examinátor není shovívavý. *Plyne z toho, že kurz není užitečný?*

p … examinátor je shovívavý

Ano, plyne.

q … kurz je užitečný

((p	Å	**Øq)**	Ù	**Øp)**	®	**Øq**
0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0
	1.		2.		Výsl.	

9. Jestli-že prší a já si vezmu deštník, nezmoknu. Vezmu si deštník. *Plyne z toho, že nezmoknu?*

p … prší

q … vezmu si deštník

Ne, neplyne.

r … zmoknu

(((p	Ù	**q)**	®	**Ør)**	Ù	**q)**	®	**Ør**
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0
	1.		2.		3.		Výsl.	

10. Logiku umím tehdy a jen tehdy, když umím uvažovat. Nejsem hloupý. Buď umím uvažovat, nebo jsem hloupý. *Plyne z toho, že umím logiku?*
11. Nebude pršet. Spadnu do potoka. Když spadnu do potoka, budu mokrý. *Plyne z toho, že jestliže nebude pršet, budu mokrý?*
12. Není pravda, že Petr hraje fotbal i hokej. Petr nehraje fotbal. *Plyne z toho, že Petr hraje hokej?*
13. Je doma nebo ve škole. Jestliže je doma, hraje počítačové hry. *Plyne z toho, že jestliže nehraje počítačové hry, pak je ve škole?*
14. Jestliže jsem vzhůru, pracuji, ale jestliže spím, jsem v posteli. Buď jsem vzhůru nebo spím. Jestliže pracuji, pak nejsem v posteli, a jestliže spím, pak nepracuji. *Plyne z toho, že jsem v posteli?*

2.3 Ekvivalence formulí

ü Dvě formule A a B jsou tautologicky ekvivalentní, jestliže generují stejnou pravdivostní funkci. Značíme $A \equiv B$.

ü Dvě formule A a B jsou tautologicky ekvivalentní, právě když formule $A \equiv B$ je tautologie

2.3.1 Důležité ekvivalence

a)	$\neg\neg a \equiv a$	zákon dvojí negace
b)	$a \vee 0 \equiv a$	zákon neutrálnosti nuly
c)	$a \wedge 1 \equiv a$	zákon neutrálnosti jedničky
d)	$a \wedge 0 \equiv 0$	zákon agresivity nuly
e)	$a \vee 1 \equiv 1$	zákon agresivity jedničky
f)	$a \vee a \equiv a$	zákony o idempotenci prvků
g)	$a \wedge a \equiv a$	
h)	$a \vee \neg a \equiv 1$	zákony o vyloučeném třetím
i)	$a \wedge \neg a \equiv 0$	
j)	$a \vee (a \wedge b) \equiv a$	zákony o absorpci
k)	$a \wedge (a \vee b) \equiv a$	
l)	$a \vee (\neg a \wedge b) \equiv a \vee b$	zákony o absorpci negace
m)	$a \wedge (\neg a \vee b) \equiv a \wedge b$	
n)	$a \vee b \equiv b \vee a$	komutativní zákony
o)	$a \wedge b \equiv b \wedge a$	
p)	$(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$	asociativní zákony
q)	$(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$	
r)	$a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	distributivní zákony
s)	$a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	
t)	$\neg (a \vee b) \equiv (\neg b \wedge \neg a)$	De Morganovy zákony
u)	$\neg (a \wedge b) \equiv (\neg b \vee \neg a)$	
v)	$a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$	ostatní ekvivalence
w)	$a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$	
x)	$a \oplus b \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$	

2.3.2 Příklady:

ü **Jsou následující formule tautologicky ekvivalentní?**

1. $((p \oplus q) \oplus r) \equiv (p \oplus (q \oplus r))$

((p	**Å**	**q)**	**Å**	**r)**	**º**	**(p**	**Å**	**(q**	**Å**	**r))**
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1

2. $((p \uparrow q) \uparrow r) \equiv (p \uparrow (q \uparrow r))$
3. $((p \downarrow q) \downarrow r) \equiv (p \downarrow (q \downarrow r))$

2.4 Vyjádření formulí pomocí vybraných spojek

2.4.1 Vyjádření formule jen pomocí konjunkce, disjunkce a negace

ü Z ekvivalencí v) w) a x) vyplývá, že všechny logické formule lze napsat jen pomocí konjunkce, disjunkce a negace. Výsledná formule je tautologicky ekvivalentní s původní formulí.

$a \Rightarrow b \equiv \neg a \lor b$

$a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \land (b \Rightarrow a) \equiv (\neg a \lor b) \land (\neg b \lor a) \equiv (\neg a \land \neg b) \lor (a \land b)$

$a \oplus b \equiv (a \land \neg b) \lor (\neg a \land b)$

$a \uparrow b \equiv \neg(a \land b)$

$a \downarrow b \equiv \neg(a \lor b)$

2.4.2 Vyjádření formule jen pomocí Shefferova operátoru

a) Negace: **Øp**

$p \equiv p \land p$

Øp ≡ ¬(p ∧ p) ≡ **p - p**

b) Konjunkce: **p** Ù **q**

p Ù **q** ≡ ¬¬(p ∧ q) ≡ ¬(p ↑ q) ≡ **(p - q) - (p - q)**

c) Disjunkce: **p** Ú **q**

p Ú **q** ≡ ¬¬(p ∨ q) ≡ ¬(¬p ∧ ¬q) ≡ ¬p ↑ ¬q ≡ **(p - p) - (q - q)**

Platí: **(p - p) - (p - p) ° p**

2.4.3 Vyjádření formule jen pomocí Piercovy šipky

a) Negace: **Øp**

$p \equiv p \lor p$

Øp ≡ ¬(p ∨ p) ≡ **p ¯ p**

b) Konjunkce: **p** Ù **q**

p Ù **q** ≡ ¬¬(p ∧ q) ≡ ¬(¬p ∨ ¬q) ≡ ¬p ↓ ¬q ≡ **(p ¯ p) ¯ (q ¯ q)**

c) Disjunkce: **p** Ú **q**

p Ú **q** ≡ ¬¬(p ∨ q) ≡ ¬(p ↓ q) ≡ **(p ¯ q) ¯ (p ¯ q)**

Platí: **(p ¯ p) ¯ (p ¯ p) ° p**

2.4.4 Příklady:

ü Pomocí Sheferova operátoru vyjádřete spojky $\rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\oplus$

1. $p \rightarrow q$
2. $p \Leftrightarrow q$
3. $p \oplus q$

ü Pomocí Piercovy šipky vyjádřete spojky $\rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\oplus$

1. $p \rightarrow q$
2. $p \Leftrightarrow q$
3. $p \oplus q$